Vnější kalkulus

Antisymetrické formy
Vnější derivace
Lieova derivace forem
Uzavřené a exaktní formy, kohomologie

Antisymetrické formy

prostor tečných p-forem $\Lambda^p M = \mathbb{T}^0_{[p]} M$

prostor polí p-forem $\mathcal{A}^p M = \mathcal{T}^0_{[p]} M$

vnější algebra - nehomog. formy ΛM

pole nehom. forem $\mathcal{A} M$

Výhoda AS forem je, že se lze obejít bez indexů

- všechny indexy si jsou rovnocenny
- pořadí mění jen znaménko

použití

- symplekt. geom.
- Riemannovské geom
- reprez. Clifford. algeber → spinory
- EM pole
- Hodgeho teorie
- kohomologie

diferencovatelnost a integrovatelnost

- možnost zavedení diferencování bez další struktury
- možnost integrování

Vnější derivace

Def:

$$d : \Lambda^p M \to \Lambda^{p+1} M \quad \text{případně } \Lambda M \to \Lambda M$$

$$d(\omega + r\sigma) = d\omega + r\, d\sigma \qquad r \in \mathbb{R}$$

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge d\sigma \qquad \omega \in \Lambda^p M$$

na $\Lambda^0 M = FM$ působí d jako gradient

$$dd\omega = 0$$

Pozn. Leibniz

užití abstr. i-dexů eliminuje znaménko

$$d_{\underline{a}}(\omega_{\underline{b}\ldots} \wedge \sigma_{\underline{c}\ldots}) = (d_{\underline{a}}\omega_{\underline{b}\ldots}) \wedge \sigma_{\underline{c}} + \omega_{\underline{b}\ldots} \wedge d_{\underline{a}}\sigma_{\underline{c}}\ldots$$

Pozn. fce

$$\Lambda^0 M = FM \Rightarrow d(f\omega) = df \wedge \omega + f\, d\omega$$

úplnost a jednozn. definice

$$d\omega = d\Big(\sum_{a_1 < \ldots < a_p} \omega_{a_1 \ldots a_p}\, dx^{a_1} \wedge \ldots \wedge dx^{a_p}\Big)$$

$$= \sum_{a_1 < \ldots < a_p} d\omega_{a_1 \ldots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \ldots \wedge dx^{a_p}$$ vnoření uspoř. rozderivování $d\omega_{a_1 \ldots a_p}$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{a_0 a_1 \ldots a_p} \omega_{a_1 \ldots a_p, a_0}\, dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \ldots \wedge dx^{a_p}$$ redukce sumy přes uspořádané sumy

$$= (p+1) \sum_{a_0 < a_1 < \ldots < a_p} \omega_{[a_1 \ldots a_p, a_0]}\, dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \ldots \wedge dx^{a_p}$$

$\Rightarrow$ explicitní výraz pro $d\omega$

$\Rightarrow$ souřadnice $(d\omega)_{a_0 a_1 \ldots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \ldots a_p, a_0]}$

nezávislost na volbě souř.

$$\omega'_{a'_1 \ldots a'_p} = X^{n_1}{}_{,a'_1} \cdots X^{n_p}{}_{,a'_p}\, \omega_{n_1 \ldots n_p} \qquad T^n{}_{a'} = \frac{\partial x^n}{\partial x^{a'}} = x^n{}_{,a'}$$

$$\omega'_{a'_1 \ldots a'_p, a'_0} = X^{n_0}{}_{,a'_0} X^{n_1}{}_{,a'_1} \cdots X^{n_p}{}_{,a'_p}\, \omega_{n_1 \ldots n_p, n_0} + \Big(\underbrace{X^{n_1}{}_{,a'_1 a'_0}}_{\text{sym.}} X^{n_2}{}_{,a'_2} \cdots + X^{n_1}{}_{,a'_1} \underbrace{X^{n_2}{}_{,a'_2 a'_0}}_{\text{sym.}} \cdots + \ldots\Big) \omega_{n_1 \ldots n_p}$$

$$\omega'_{[a'_1 \ldots a'_p, a'_0]} = X^{n_0}{}_{,a'_0} X^{n_1}{}_{,a'_1} \cdots X^{n_p}{}_{,a'_p}\, \omega_{[n_1 \ldots n_p, n_0]}$$

Př:

$$d_a f = f_{,a}$$

$$d_a \alpha_b = 2\,\alpha_{[b,a]} = \alpha_{b,a} - \alpha_{a,b}$$

$$d_a \sigma_{bc} = 3\,\sigma_{[bc,a]} = \sigma_{bc,a} + \sigma_{ab,c} + \sigma_{ca,b}$$

Zúžení vnější der. s vektory

$$a\cdot(d\underset{1}{\gamma})\cdot b = a\cdot d(b\cdot\gamma) - b\cdot d(a\cdot\gamma) - [a,b]\cdot\gamma$$

důkaz

$\gamma = df \;\Rightarrow\; 0 = a\cdot d(b\cdot df) - b\cdot d(a\cdot df) - [a,b]\cdot df$

z definice komutátoru.

$\gamma = h\,df \;\Rightarrow\; a\cdot(d(h\,df))\cdot b = a\cdot(dh\wedge df)\cdot b = (a\cdot dh)(b\cdot df) - (a\cdot df)(b\cdot dh)$

$a\cdot d(b\cdot h\,df) - b\cdot d(a\cdot h\,df) - [a,b]\cdot h\,df =$

$= (a\cdot dh)(b\cdot df) - (b\cdot dh)(a\cdot df)$ o.k.

+ linearita vůči součtu

obecně

$$(d_{n_0}\omega_{n_1\dots n_p})\,a_0^{n_0}a_1^{n_1}\cdots a_p^{n_p} =$$

$$= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\, a_k^{n_k}\, d_{n_k}\big(\underbrace{\omega_{n_0\dots n_p}\, a_0^{n_0}\cdots a_p^{n_p}}_{\text{mimo } k\text{-člen}}\big)$$

$$+ \sum_{0\le k\le l\le p} (-1)^{k+l}\,[a_k,a_l]^n\, \underbrace{\omega_{n\,n_0\dots n_p}\, a_0^{n_0}\cdots a_p^{n_p}}_{\text{mimo } k,l\text{-členů}}$$

Theorem:

$$(d_{\mu_0}\omega_{\mu_1\dots\mu_n})\, a_0^{\mu_0} a_1^{\mu_1}\dots a_n^{\mu_n} =$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^\mu d_\mu\Big(\underbrace{\omega_{\mu_0\dots\mu_n} a_0^{\mu_0}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k}\Big) +$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le n} (-1)^{k+l}\, [a_k, a_l]^\mu\, \underbrace{\omega_{\mu\mu_0\dots\mu_n} a_0^{\mu_0}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k\mu_l}$$

Důkaz:

$$\omega = \sum_{1\le\mu_1<\dots<\mu_n\le d} \omega_{\mu_1\dots\mu_n}\, dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_n}$$

$$d_{\alpha_0}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \sum_{1\le\mu_1<\dots<\mu_n\le d} d_{\alpha_0}\omega_{\mu_1\dots\mu_n}\wedge d_{\alpha_1}x^{\mu_1}\wedge\dots\wedge d_{\alpha_n}x^{\mu_n}$$

$$= \sum_{1\le\mu_1<\dots<\mu_n\le d}\ \sum_{0\le k\le n} (-1)^k (d_{\alpha_k}\omega_{\mu_1\dots\mu_n})\, \underbrace{d_{\alpha_0}x^{\mu_1}\wedge\dots\wedge d_{\alpha_n}x^{\mu_n}}_{\text{mimo } \alpha_k}$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k (d_{\alpha_k}\omega_{\mu_1\dots\mu_n})\, \underbrace{d_{\alpha_0}x^{\mu_1}\dots d_{\alpha_n}x^{\mu_n}}_{\text{mimo } k}$$

$$(d_{\alpha_0}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_n})\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^\mu (d_\mu \omega_{\mu_1\dots\mu_n})\, \underbrace{a_0^{\mu_1}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } k} =$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^\mu d_\mu\Big(\underbrace{\omega_{\mu_0\dots\mu_n} a_0^{\mu_0}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k}\Big) +$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le n} (-1)^{k+l}\Big(a_k^\nu (d_\nu a_l^\mu) - a_l^\nu d_\nu a_k^\mu\Big) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \underbrace{\omega_{\mu\mu_0\dots\mu_n} a_0^{\mu_0}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k\mu_l}$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^\mu d_\mu\Big(\underbrace{\omega_{\mu_0\dots\mu_n} a_0^{\mu_0}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k}\Big) +$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le n} (-1)^{k+l}\, [a_k, a_l]^\mu\, \underbrace{\omega_{\mu\mu_0\dots\mu_n} a_0^{\mu_0}\dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k\mu_l}$$

Uzavřené a exaktní formy

Def:

ω je uzavřená $\equiv d\omega = 0$ $\quad \Omega^p_c M \quad \Omega_c M$

ω je exaktní $\equiv \exists\sigma \; \omega = d\sigma$ $\quad \Omega^p_e M \quad \Omega_e M$

neboli

$\Omega_c M = \ker d \qquad \Omega_e M = \operatorname{im} d$

platí

ω exaktní $\Rightarrow$ ω uzavřená

platí i naopak – pouze na top. triv. oblasti

na oblasti U homeomorfní B^n (tj. R^n)

ω exaktní $\Leftrightarrow$ ω uzavřená

tj.

$d\omega \Leftrightarrow \exists\sigma \; \omega = d\sigma$

obecně mohou být topologické obstrukce

→ viz deRhamova kohomologie

holonomnost báze

na topologicky triv. okolí $U \subset M$ mějme ~~zadané~~ ~~báze~~ báze $e_k \in TU$ a duální bázi $e^k \in T^*U$

následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) e_k je holonomní tj. $\exists$ souř. x^k taky, že $e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$

(ii) e^k tvoří exaktní formy $e^k = dx^k$ $\quad x^k$ souř. na U

(iii) $de^k = 0 \quad \forall k$

(iv) $[e_k, e_l] = 0 \quad \forall k, l$

důk:

(i),(ii) přímo def. holonomnosti a duálnost $\frac{\partial}{\partial x^k}$ a dx^k

(iii) $de^k = 0$ na top. triv. $U \iff e^k = dx^k$ (Poincare lema)

(iv) $e_k \cdot (de^m) \cdot e_l = e_k \cdot d(\overset{0}{\cancel{e_l \cdot e^m}}) - e_l \cdot d(\overset{0}{\cancel{e_k \cdot e^m}}) - [e_k, e_l] \cdot e^m$

$\Rightarrow \forall m \; de^m = 0 \iff \forall k,l \; [e_k, e_l] = 0$